Matrizen & Vektoren Basics

Grundregeln $A,B \in \mathbb{E}^{n \times m}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{E}$

- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $A+B = B+A$
- $(A+B)C = AC+AB$
- $\boxed{AB \neq BA}$!

Vektor-Matrix Produkt

- Wenn $b = Ax$, dann gilt $b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$
- $Ax = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ Kolonnen/Spalten.

Matrix-Matrix Produkt

- Wenn $AB=C$ dann gilt $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$
- $AB = \underbrace{\left(Ab_1 \mid Ab_2 \mid \dots \mid Ab_n \right)}_{\text{Spalten in } B} = \begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix}$ Zeilen in A.

Transposition

- $(A^T)^T = A$ • $(A^H)^H = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ • $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ • $(A+B)^H = A^H + B^H$
- $(AB)^T = B^T A^T$ • $(AB)^H = B^H A^H$

Beweis → obige Formel

Symmetrische Matrizen

(i) Wenn $A, B \in \mathbb{E}^{n \times n}$ symmetrisch sind gilt
$AB = BA \Leftrightarrow AB$ symmetrisch

(ii) Für beliebige Matrizen gilt:
$A^T A$ und $A A^T$ sind symmetrisch.

Beweis (i) ($\Leftarrow$) ist AB symmetrisch gilt $(AB)^T = (BA)^T$
$= A^T B^T = BA$ da A & B symmetrisch.
($\Rightarrow$) $(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$

(ii) $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ □

(iii) Wenn A symmetrisch, dann A^{-1} symmetrisch.

Beweis (iii) $I = A^{-1} A \Leftrightarrow I^T = (A^{-1} A)^T \Leftrightarrow I^T = A^T (A^{-1})^T$
$= A (A^{-1})^T$ da A symm. $\Leftrightarrow A^{-1} I = A^{-1} A (A^{-1})^T$
$\Leftrightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$ □

Inverse einer Matrix

Def Eine $n \times n$ Matrix A heisst invertierbar falls eine Matrix A^{-1} existiert s.d. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

Grundlegendes

- Das Inverse ist eindeutig, falls es existiert. ← (i)
- Folgendes ist äquivalent:
  - A ist invertierbar
  - $\exists X$ s.t. $AX = I_n$
  - $\exists! X$ s.t. $AX = I_n$
  - A regulär ≟ $\operatorname{rang}(A) = I_n$

Beweis (i)! Angenommen X, Y sind Inverse von A:
$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$ □

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, • $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

$\forall A, B$ regulär

Beispiele

① $\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - d z_3} \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 - c z_3}$

$\left(\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 - b z_2} \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 1 & -b & db-c \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{z_1 / a} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1/a & -b/a & \frac{db-c}{a} \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right) \Rightarrow a \neq 0.$

②

PLR - Zerlegung

Beispiel

Wir möchten $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ zerlegen:

$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{z_2 + 4 z_1}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{P} & \multicolumn{3}{c|}{L} & \multicolumn{3}{c}{R} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

- Wenn ich von z_4 3 mal z_1 abziehe dann $L[z_1, z_4] = +3$, also umgekehrtes Vorzeichen.
- Bei Zeilenvertauschung in R: Vertausche Spalten in P und Zeilen bis und ohne 1 in der Diag.

Lösen von LGS

① Berechne $A = PLR$
② Löse $Pz = b$ mit $z = P^T b$ (da orthogonal)
③ Löse $Ly = z$ rekursiv.
④ Löse $Rx = y$ rekursiv.
→ Falls $P = I \Rightarrow z = b$.

Beispiel Auflösen

$Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, wir nutzen $A = PLR$ von oben.

② $z = P^T b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

③ $Ly = z \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \to y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

④ $Rx = y \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \to x = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Grundlegende Definitionen zu VRs

Def Vektorraum

Ein VR V über $\mathbb{E}$ (zB. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ist eine nichtleere Teilmenge auf welcher eine Addition

$$x, y \in V \longmapsto x + y \in V$$

und eine Multiplikation $\alpha \in \mathbb{E}, x \in V \mapsto \alpha x \in V$ definiert sind mit folgenden Axiomen/Regeln:

- V1 $x + y = y + x \quad \forall x, y \in V$
- V2 $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in V$
- V3 $\exists\, 0 \in V$ s.d. $x + 0 = x \quad \forall x \in V$
- V4 zu allen $x \in V$ $\exists!\, (-x) \in V$ s.d. $x + (-x) = 0$
- V5 $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\forall \alpha \in \mathbb{E}, \forall x, y \in V)$
- V6 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}, x \in V)$
- V7 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}, \forall x \in V)$
- V8 $1 \cdot x = x \quad (\forall x \in V)$

Beispiele

- $C[a,b]$, der Raum der stetigen reellen Funktionen auf $[a,b]$ mit $f+g \longmapsto f(x)+g(x)$ & $\alpha f \longmapsto \alpha f(x)$
- Der Raum $\mathbb{R}^n$ der n-dim Vektoren in $\mathbb{R}$.
- Die Menge aller Polynome $P := \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m$

Def Körper

Ein Körper ist eine nichtleere Menge $\mathbb{K}$ mit einer Addition und Multiplikation. & Axiome:

- K1 $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$
- K2 $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma)$
- K3 $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ s.d. $\alpha + 0 = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- K4 $\exists!\, (-\alpha) \in \mathbb{K}$ für $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ s.d. $\alpha + (-\alpha) = 0$
- K5 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- K6 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \gamma(\beta \cdot \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
- K7 $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ und $1 \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- K8 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0\ \exists!\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ s.d. $(\alpha^{-1})\alpha = 1$
- K9 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$
- K10 $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

Def Untervektorraum

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum falls sie bzgl. Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist. dh. falls $x + y \in U$, $\alpha x \in U$ für $(\forall x, y \in U, \forall \alpha \in \mathbb{E})$.

$\rightarrow$ Ein Unterraum ist selbst ein Vektorraum

$\rightarrow$ Nullvektor in jedem Unterraum.

Beispiele

- Sei $Ax = 0$, dann ist $\mathcal{L}_0 = \{x \mid Ax = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Beweis $x, y \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow Ax = 0$ & $Ay = 0$, $Ax + Ay = 0$
$\Rightarrow A(x+y) = 0$. Zudem $A \cdot (\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha \cdot 0 = 0$. □

Def Linearkombination

V ein VR über $\mathbb{E}$, $a_1, \dots, a_\ell \in V$ auserwählte Vektoren in V

$$x = \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k a_k = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_\ell a_\ell \quad \text{, so heisst}$$

x Linearkombination von $a_1, \dots, a_\ell$

Def Span

Die Menge aller Linearkombinationen von $a_1, \dots, a_\ell$ heisst aufgespannter Unterraum und wird bezeichnet:

$\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_\ell\}$, $a_1, \dots, a_\ell$ nennt man Erzeugendensystem

Def Basis

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem nennt man Basis

wichtige Theoreme bzgl Basen

- Spalten einer $n \times n$ Matrix sind Basis wenn Matrix regulär ist.
- $\dim(V) = \#$ Vektoren in Basis.
- Jeder Vektor in V lässt sich eindeutig als Linearkombi einer Basis schreiben.

Beweis $x = \sum \lambda_i b_i$ & $x = \sum \lambda_i' b_i$
$\rightarrow 0 = \sum \lambda_i b_i - \sum \lambda_i' b_i$
$\Rightarrow \lambda_i - \lambda_i' = 0$ □

Def Komplementäre Unterräume

Zwei Unterräume U, U' von VR V mit der Eigenschaft, dass jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = u + u'$ mit $u \in U, u' \in U'$ hat, heissen komplementär. Man schreibt $V = U \oplus U'$

Lineare Abbildungen

Def Lineare Abbildung

Eine Abbildung zwischen VR X, Y heisst linear, falls
$F(x+\tilde{x}) = F(x) + F(\tilde{x})$, $F(\gamma x) = \gamma F(x)$ oder
$F(\beta x + \gamma \tilde{x}) = \beta F(x) + \gamma F(\tilde{x})$

Def Bild

$F(X) = \mathrm{Im}(F) = \{ F(x) \in Y \mid x \in X \} \subseteq Y$

Def Kern

$\mathrm{Ker}(F) = \{ x \in X \mid Fx = 0 \} \subseteq X$

↳ $\mathrm{Ker}(F)$ ist Unterraum von X:
Beweis Seien $x, y \in \mathrm{Ker}(F)$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$, dann ist
$F(\beta x + \gamma y) = \beta F(x) + \gamma F(y) = \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0$ □

Matrixdarstellung

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] \arrow[d, shift right, "K_x"'] & y \in Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "K_y"'] & z \in Z \arrow[d, shift right, "K_z"'] \\
\lambda \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "K_x^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "BA"'] & \mu \in \mathbb{E}^m \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "K_y^{-1}"'] & \zeta \in \mathbb{E}^p \arrow[u, shift right, "K_z^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

mit: $F = K_Y^{-1} A K_X$
$A = K_Y F K_X^{-1}$

Lineare Abbildung ⇒ Matrix

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis und F eine lineare Funktion. Wir wollen $[F]_B = A$.
dann ist $A = [F(b_1) | \cdots | F(b_n)]$

Beispiel

Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $T(x,y,z) = (3x+y, x+z, x-z)$
dann ist $A = [T]_B = [T(b_1) | T(b_2) | T(b_3)] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Def Surjektiv

Gilt $F(X) = Y$ nennt man F surjektiv. formal auch $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$.

Def Injektiv

Gilt $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$ dann nennt man F injektiv.
↳ Es gilt F injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.
Beweis
($\Rightarrow$) $0 \in Y$ einziges Urbild, nämlich $0 \in X$. da linear
($\Leftarrow$) $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ & $x \neq y$ $x - y \neq 0$ so folgt $Fx - Fy \neq 0$ $\Rightarrow Fx \neq Fy$ □

Dimensionen & Rang

Dimensionsformel

Wenn $F: X \to Y$ linear, dann gilt:
$\dim(X) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \mathrm{Rang}(F)$

Zudem gilt:
(i) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Rang}(F) = \dim X$
(ii) $F: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Rang}(F) = \dim(X) = \dim(Y)$
(iii) $F: X \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Rang}(F) = \dim(X)$ & $\mathrm{Ker}(F) = 0$

Rang

Für F, G gilt:
- $\mathrm{Rang}(FG) \leq \min\{\mathrm{Rang}(F), \mathrm{Rang}(G)\}$
- G injektiv $\Rightarrow \mathrm{Rang}(GF) = \mathrm{Rang}(F)$
- F surjektiv $\Rightarrow \mathrm{Rang}(GF) = \mathrm{Rang}(G)$

Wenn $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$ & $B \in \mathbb{E}^{p \times m}$ dann gilt
- $\mathrm{Rang}\, BA \leq \min\{\mathrm{Rang}(B), \mathrm{Rang}(A)\}$
- $\mathrm{Rang}\, B = m \; (\leq p) \Rightarrow \mathrm{Rang}\, BA = \mathrm{Rang}\, A$
- $\mathrm{Rang}\, A = m \; (\leq n) \Rightarrow \mathrm{Rang}\, BA = \mathrm{Rang}\, B$.

Zudem:
- A injektiv $\Leftrightarrow$ A hat vollen Spaltenrang
- A surjektiv $\Leftrightarrow$ A hat vollen Zeilenrang.

Und
$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T) = \mathrm{Rang}(A^H)$
Zudem gilt Zeilenrang = Kolonnenrang für jede Matrix.

Bild ausrechnen

Das Bild $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{R}(A)$ ist der Spaltenraum.
d.h. $A(v_1, \dots, v_n)$ dann ist $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Kern ausrechnen

Der Kern $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(A)$ ist der Nullraum.
d.h. $Ax = 0$. ⇝ Löse mit Gauss.

H sollte ganz links sein.

Abbildungen und Basen

Angenommen F linear mit

$$
\begin{tikzcd}
B, X \arrow[r, "F"] & C, Y \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & Fx = y \arrow[d] \\
{[x]_B} \arrow[r, "A"] & {[Fx]_C = [y]_C}
\end{tikzcd}
$$

$\{b_1, \dots, b_n\}$, $\{c_1, \dots, c_n\}$

$[y]_C = A [x]_B$

mit $A = \mathrm{Mat}(F, B, C) = \left[[F(b_1)]_C \cdots [F(b_n)]_C \right]$

Basiswechsel

Theorie

$T = \mathrm{Mat}(id, B', B)$, $\xi' = T^{-1} \xi$, $\xi = T \xi'$
bzw. $[v]_B = T [v]_{B'}$ ← neue Basis in alter Basis
wobei $T = \left[[b'_1]_B, \dots, [b'_n]_B \right]$

Falls $V = \mathbb{E}^n$ dann $B' = BT$

Kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "K_x"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "K_y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "K_x^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "K_y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "T"'] & \eta' \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}
$$

$y = Fx$, $\eta = A\xi$, $\eta' = B\xi'$
$\xi = T\xi'$, $\eta = S\eta'$
$B = S^{-1} A T$, $A = S B T^{-1}$

Lineare Abbildung Bsp

$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_2\end{bmatrix}$

$\rightarrow \quad x-y = c_1, \; y = c_2$

$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = L\left((x-y)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) \ldots$

Basiswechsel Beispiele:

① 1 VR der Polynome Grad ≤ 2 mit

$p_1(t) = t^2,\ p_2(t) = (t-1)^2,\ p_3(t) = (t+1)^2$

$q_1(t) = 1,\ q_2(t) = t+1,\ q_3(t) = t^2+t+1.$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ regulär, somit eine Basis

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

alternativ $B' = BT$

$(p_1(t)\ p_2(t)\ p_3(t)) = (1\ t\ t^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

mit $P = \mathrm{Mat}(id, \mathbb{P}, \mathbb{E})$, $Q = \mathrm{Mat}(id, \mathbb{Q}, \mathbb{E})$

2 → Basiswechsel von B_p nach B_q

$\xi = P\xi_p,\quad \xi = Q\xi_q \Rightarrow Q^{-1}\xi = \xi_q$

$Q^{-1}P\xi_p = \xi_q \rightarrow \mathrm{Mat}(id, \mathbb{P}, \mathbb{Q}) = Q^{-1}P.$

3 $w(t) = 3p_1(t) + 2p_2(t) - p_3(t)$ in ④ Basis:

$\rightarrow T\xi_p = \xi_q \Rightarrow Q^{-1}P\xi_p = \xi_q$

$\rightarrow w(t) = 7q_1(t) - 10q_2(t) + 4q_3(t).$

② $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x+2y+3z=0 \right\}$, Spiegelung?

$\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1 Finde zwei Vektoren in der Ebene:

$(1\ \ 2\ \ 3\ |\ 0) \rightarrow x = -2y-3z$

e.g. $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $\hat{n}$ ist Basis

2 Spiegelung: $\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\big([F(b_1)]\ [F(b_2)]\ [F(n)]\big)$

Einheitsbasis

3 Spiegelung in $\mathcal{E}$? $\mathrm{Mat}(F, id, id)$,

$\xi' = T^{-1}\xi,\ \xi = T\xi',\ T = [[b_1]_{\mathcal{E}}\ [b_2]_{\mathcal{E}}\ [n]_{\mathcal{E}}]$

$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dann gilt $F_{\mathcal{E}} = T F_B T^{-1}$

Orthogonale & Unitäre Basiswechsel

$I = T^H T$

$\sum_{i=1}^{n} \overline{T_{ik}} T_{il} = c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\tau_{ik}} \sum_{j=1}^{n} \tau_{jl} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} b_i, \sum_{j=1}^{n} \tau_{jl} b_j \right\rangle$

$= \langle b_k', b_l' \rangle = \delta_{kl}$

Angenommen $\mathcal{B}'$ & $\mathcal{B}$ sind orthonormierte Basen, dann gilt $\langle \xi', \eta' \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$, $\|\xi\| = \|\xi'\|$

$\measuredangle(\xi', \eta') = \measuredangle(\xi, \eta)$, $\xi' \perp \eta' \Leftrightarrow \xi \perp \eta$.

Beweis $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^H \eta = (\xi')^H T^H T \eta' = \xi'^H \eta' = \langle \xi', \eta' \rangle$ □

wrong page!

Orthogonale & Unitäre Abb.

Def Unitäre / ortho Abb.

X, Y zwei unitäre VR, F linear.

falls $\langle Fx, Fy \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X$, dann F unitär ($\mathbb{C}$), orthogonal ($\mathbb{R}$)

Grundlegendes, falls F ortho, unitär.

① $\|Fx\|_Y = \|x\|_X$, längentreu

② $x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy$

③ $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ injektiv

④ F isomorphismus

⑤ $\{b_1, \dots, b_n\}$ ONB $\Rightarrow \{Fb_1, \dots, Fb_n\}$ ONB

⑥ F^{-1} orthogonal bzw unitär.

⑦ $A = [F]_B$ unitär / ortho wenn B ONB.

Beweis

③ $Fx = 0 \Leftrightarrow \langle Fx, Fx \rangle_Y = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ □

Skalarprodukte & Normen

Def Norm

Eine Norm in einem Vektorraum V ist eine Funktion

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) Positiv definit

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$$
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(N2) dem Betrage nach homogen

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{E}$$

(N3) Dreiecksungleichung

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in V$$

Beispiele

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$

2. $\|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$

Def Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt in einem VR ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{E}, \quad x, y \mapsto \langle x, y \rangle$$

mit folgenden Eigenschaften.

(S1) Linear im zweiten Faktor

$$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$
$$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

(S2) Symmetrisch/Hermitesch

$\mathbb{E} = \mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$\mathbb{E} = \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(S3) Positiv Definit

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x$$
$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Es folgt: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

und $\langle \alpha w + \beta x, y \rangle = \overline{\alpha} \langle w, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, y \rangle$

Def Induzierte Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$\triangle$ nicht induzierte Normen.

Cauchy-Schwarz

$\forall x,y \in V$ gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, gleichheit wenn x,y linear abhängig.

Beweis $\alpha \in \mathbb{E}$ beliebig

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

Wähle $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ dann:

$$0 \leq |\langle x, y \rangle|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 + \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \square$$

Def Winkel

Der Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ ist def durch

$$\varphi := \arccos \frac{\operatorname{Re}\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Orthonormale Basen

Falls $\mathcal{B}$ eine ONB ist so gilt $\xi_k = \langle b_k, x \rangle$

Beweis

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k b_k, \quad \langle b_j, x \rangle = \langle b_j, \sum_{k=1}^n \xi_k b_k \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \langle b_j, b_k \rangle = \xi_j$$

da alle ausser b_j, b_j null sind. $\square$

Satz von Parseval

Falls wir auf einer ONB arbeiten, mit $\xi_k = \langle b_k, x \rangle$ und $\eta_k = \langle b_k, y \rangle$ so gilt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\xi_k} \eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta \rangle$$

Beweis

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \xi_k b_k, \sum_{k=1}^n \eta_k b_k \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \overline{\xi_k} \eta_l \underbrace{\langle b_k, b_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_{k=1}^n \overline{\xi_k} \eta_k \quad \square$$

Parseval Beispiel

Berechne $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$ von $f(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $g(t) = \frac{15}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3} + t^2\right) + \sqrt{2}$

Gegeben sei ONB $\left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3} + t^2\right) \right\}$

somit gilt $\langle f, g \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \rangle = 2.$

Gram-Schmidtsches-Orthogonalisierungsverfahren

Algorithmus

$\{a_1, \dots, a_n\}$ Menge von Vektoren, wir berechnen $\{b_1, \dots, b_n\}$:

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$\tilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j$$

$$b_k = \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|}$$

$\to \{b_1, \dots, b_k\}$ sind paarweise orthogonal.

Bsp. Gram Schmidt

Wir definieren $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ und $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Orthogonale Basis von W bzgl. $\langle x, y \rangle_A$

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_A} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^T A a_1}} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle_A b_1 = a_2 - (b_1^T A a_2) b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def Orthogonales Komplement

$V = U \oplus U^\perp$ mit

$$U^\perp = \{ x \in V : x \perp U \}$$

Zudem $(U^\perp)^\perp = U$

Orth. Nullraum & Spaltenraum

Für $A \in \operatorname{Mat}(\mathbb{C}^{m \times n})$ mit Rang r gilt:

- $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A^H))^\perp \subset \mathbb{E}^n$
- $\mathcal{N}(A^H) = (\mathcal{R}(A))^\perp \subset \mathbb{E}^m$
- $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H) = \mathbb{E}^n$
- $\mathcal{N}(A^H) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^m$

Satz 6.9

Kleinste Quadrate

Definition

Sei $Ax=b$ ein LGS mit mehr Gleichungen als Variabeln. $\leadsto$ normalerweise nicht lösbar gesucht $Ax \approx b$ D.h. $x^* = \underset{x \in \mathbb{E}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax-b\|_2^2$

Wir können das x^* mit der Normalengleichung finden: $A^H A x^* = A^H b$

Somit gilt $x^* = (A^H A)^{-1} A^H b$, das geht wenn A regulär ist:

Moore-Penrose-Pseudoinverse

$A^+ = (A^H A)^{-1} A$ nennt man Moore-Penrose-Pseudoinverse. Wenn A singulär dann mache SVD & setze $A^+ = U^* D^+ U$, D^+ ist pinv von D.

Beispiel

add Ex.

QR-Zerlegung

Definition

Man zerlege A (mit Maximalem Rang) in QR mit Q orthonormale Kolonnen/Spalten und R eine Rechtsdreiecksmatrix.

Algorithmus (Gram-Schmidt)

$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$, $\tilde{q}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle$, $q_k := \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|}$ $Q = (q_1 \cdots q_n)$

Zudem definieren wir

$r_{11} = \|a_1\|$

$r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}$

$r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$

Beispiel

Zerlege $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \\ 2 & 6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ $q_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r_{11} = 5$

$$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left\langle \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\frac{1}{5}(24-4+12-7) = 5 = r_{12}}$$

$$\Rightarrow \tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{5}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\|_2 = 10 = r_{22}$$

$$\hookrightarrow Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Normen (Operator)

Def Induzierte Matrixnorm

Seien $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ Vektor Normen dann ist

$\|\cdot\| : L(X,Y) \to \mathbb{R},\ F \mapsto \|F\|$

$$\|F\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$$

Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Vereinfachung

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Fx\|_Y$$

Eigenschaften

N1 – N3

OPN4 $\|G \circ F\| \leq \|G\| \|F\|$

OPN5 $\|Fx\|_Y \leq \|F\| \|x\|_X$

Proof

N2: $\|\lambda F\| = \sup$ - - -

Toyota OPN
Stride
Copy.

Matrixnormen

Falls OpN5 $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ so nennt man die Matrixnorm $\|\cdot\|$ kompatibel zur Vektornorm.

Nicht-Induzierte Normen

z.B. Maximumsnorm

$p \in V$, $\|p\|_\infty = \max |p(t)|$ ist nicht induziert ($t \in [0,1]$)

da die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt ist.

$$\forall x, y \in V \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

aber $x = t^2$, $y = 1 - t^2$ erfüllen das bei $\|\cdot\|_\infty$ nicht.

Def Konditionszahl

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

Spektralnorm berechnen

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{w} \mid w \text{ größer EW von } A^H A\}$.

$\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{\sqrt{w}} \mid w \text{ kleinste EW von } A^H A\}$.

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\{\sqrt{w} \mid w \text{ EW von } A^H A\}}{\min\{\sqrt{w} \mid w \text{ EW von } A^H A\}}$$

Frobenius Norm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2}$$

∞ – Norm

a.k.a. Supremumsnorm.

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

↳ Für Matrizen gilt dann:

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \sup\left(\max_{i=1,\dots,n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|\right)$$

$$= \max_{i=1,\dots,n}\left(\sup_{\|x\|=1} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|\right)$$

$$= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\|U\|_2 = 1$ wenn U unitär da $U^H U = I$.

↳ Beweis $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $A^H A$ hermitesch

$\Rightarrow \exists$ Spektralzerlegung $A^H A$ mit $\lambda \geq 0$.

Sei $y = U^H x$ & es gilt ja $\|y\|_2 = \|x\|_2$

$$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_2^2 = \sup x^H A^H A x$$

$$= \sup x^H U \Omega U^H x = \sup y^H \Omega y$$

$$= \sup \sum^{n} w_k |y_k|^2 = \max w_k \quad \square$$

Skalarprodukt Bsp

$\langle v, F(v) \rangle = 0 \;\; \forall v \in V$, F ist Nullabb. in $\mathbb{C}$.

Beweis

Serie 9 A 1.

Von Skalarprod Induzierte Normen

$\rightarrow$ Parallelogrammgl. erfüllt.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Beweis Serie 10.

Determinante

Permutationen:

Bijektion von $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$

Matrix Permutation $(1,2,3,4) \mapsto (1,3,2,4)$ ist wie $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}$. , brauchte 1 Vertauschung.

Signum

$sign(p) = 1$ wenn gerade anzahl Vertausch. ungerade -1.
p Permutation

Determinante

Definiert als Summe über $n!$ Perms.

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} sign(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,p(n)}$$

Wir können aber auch anders!

nach Spalte: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+\ell} a_{j,\ell} \cdot \det(A_{[j,\ell]})$

nach Zeile: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(A[k,j])$

mit $A[k,j]$ ist $(n-1)\cdot(n-1)$ Mat wo k Zeile und j Spalte gestrichen sind.

$\to$ nur $n \times n$ Matriken.

Bsp

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1+9) + 3(3-6) + 2(-9+2)$$

$$= 8 + (-9) + 2(-7) = 8 - 9 - 14 = -15$$

Nutzen:

- Sehen ob Zeilen linear Abhängig sind
- $\det(A)$ mit $A = (v_1\ v_2)$ ist Fläche/Vol von Parallelopiped aufgespannt von $(v_1), (v_2)$

Eigenschaften

Satz 8.3

- $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma a_{\ell 1} + \gamma' a'_{\ell 1} & \dots & \gamma a_{\ell n} + \gamma' a'_{\ell n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \gamma \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \gamma' \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{\ell 1} & \dots & a'_{\ell n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
- wenn zwei Zeilen vertauschen dann Vorzeichenwechsel
- $\det(\mathbb{1}) = 1$

8.4

- Hat A Zeile die komplett 0 ist dann $\det(A) = 0$
- $\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det(A) = 0$
- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Addieren ändert Wert $\det(A)$ nicht.
- A Diagonalmatrix $\Rightarrow \det(A) =$ Produkt Diagonale
- A Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det(A) =$ Produkt Diagonale.
- Ist A regulär $\Rightarrow \det(A) \neq 0$
  d.h. Spalten lin. unabh.

globale Eigenschaften:

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$

  Beweis $\det A^T = \det R^T \det L^T \det P = \det P \prod_{k=1}^{n} r_{kk} \prod_{j=1}^{n} l_{jj}$
  $= \det P^T \det L \det R = \det A$. $\square$
- Wenn U unitär, dann $|\det U| = 1$

  Beweis $1 = \det(I) = \det(U \cdot U^H) = \det(U) \cdot \det(U^H)$
  $= \det(U) \cdot \overline{\det(U)} = |\det(U)|^2$ $\square$

Block dreiecksmat.

Für eine 2×2 Blocksdreiecksmatrix gilt

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D) \text{ bzw. } \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Eigenvektoren & Eigenwerte

Def Eigenwert & Eigenvektor

F linear $: V \to V,\ x \mapsto Fx$ dann
$\lambda \in \mathbb{E}$ Eigenwert falls $\exists v \neq 0$ Eigenvektor
s.d. $Fv = \lambda v$

Def Eigenraum

Der Eigenraum zu einem Eigenvektor ist

$$E_\lambda := \{v \in V;\ Fv = \lambda v\}$$

EW & EV von F & $[F]_B$ sind gleich

Eigenw. & EV von F & $[F]_B$ sind gleich d.h.

λ EW von F $\iff$ λ EW von A
x EV von F $\iff$ ξ EV von A

Beweis $Fx = \lambda x \iff K(Fx) = K(\lambda x)$
$= K(F)K(x) = \lambda K(x) \iff A\xi = \lambda \xi$.

Es gilt $Fv = \lambda v$, somit auch $F(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$ somit sind EV nicht eindeutig.

E_λ ist Menge für die gilt
$(F - \lambda I)v = 0$
somit $E_\lambda = \ker(F - \lambda I)$

Def Charakteristisches Polynom

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist char Polynom

$\chi_A(\lambda) = 0$ ist char. Gleichg.

Berechnen von EW & EV Algo

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann

① $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ find Polynomial

② Find roots of $\chi_A(\lambda)$, Vielfachheit der NS ist algebraische Vielfachheit des EW

③ Für jeden EW λ_k bestime Basis des Kernes d.h. löse $(A - \lambda_k I)v = 0$ mit Gauss. $\to$ dim des Kerns ist geometrische Vielfachheit des EW.

Geometrische Vielfachheit ist kleiner gleich algebraischen.

Beispiel kompletter Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (5-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 12(-1-\lambda) - 6(5-\lambda) + 8(-2-\lambda) + 24 + 24$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

Char Gleichg: $0 = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2$

EWs: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$

EW 1 Nun lösen wir, EW 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & 6 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & 6 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Bsp 1

$$\xrightarrow[z_2 - 2z_1]{z_3 + z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$4x - s + 3t = 0$ $\quad v_1.\ s = 1,\ t = 0,\ 4x - s = 0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2.\ s = 0,\ t = 1,\ 4x + 3t = 0$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

EV sind $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{EW\,1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{EW\,0}$

alternativ auch $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\to V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

Spektralzerlegung

Def Spektralzerlegung/Diagonalisierung

$$AV = V\Lambda$$

Λ diagonal mit EW

$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ v_i ist EV zum i-ten EW

da $Av_k = v_k \lambda_k$

und somit $A = V\Lambda V^{-1}$

wenn $V^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix}$

dann $A = \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda_k w_k^T$

$w_k^T A \lambda_k$

Def linker EV $\quad w_k^T A = \lambda_k w_k^T$

$\uparrow$ linker EV.

EV zu verschiedenen EW sind lin. unabh.

Beweis per Induktion

$m=1$ richtig da $v_1 \neq 0$.

Angenommen es gelte für $v_1, \dots, v_m$ zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Sei nun λ_{m+1} ein EW mit EV v_{m+1}

AFSOC. $v_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k v_k$

dann $Fv_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k F v_k$ $\quad$ dann $\lambda_{m+1} v_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \lambda_k v_k$

wegen dann $\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \underbrace{(\lambda_{m+1} - \lambda_k)}_{} v_k = 0$

so folgt $\gamma_1, \dots \gamma_n = 0$ $\neq 0$ da aber $v_{m+1} \neq 0$

folgt das Theorem per Widerspruch.

Diag. hermitescher Matrizen

(i) Alle EW sind reell

(ii) alle EV sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n$

(iii) $\exists$ ONB aus EV $u_1, \dots, u_n$ von A

(iv) Für U unitär gilt

$$U^H A U = \Lambda$$

Beweise

ii)&i) aus $A = A^H$ folgt

$\langle u, Av \rangle = u^H A v = u^H A^H v = (Au)^H v = \langle Au, v \rangle$

damit

$\lambda_v \langle u, v \rangle = \langle u, \lambda_v v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle \lambda_u u, v \rangle$
$= \bar{\lambda}_u \langle u, v \rangle$

$\Rightarrow \lambda_v = \bar{\lambda}_u \rightarrow$ setze $u = v$ $\square$

iii) kompliziert $\rightarrow$ Induktion

0 EW $\Leftrightarrow$ A singulär

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ singulär